

QUESITO 6 (CALCOLO INTEGRALE)

Si consideri la funzione integrale $F(x) = \int_a^x \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} dt$,

con $x \geq a$, in cui a indica un parametro reale positivo.

Determinare il più grande valore di a in modo che $F\left(\frac{2}{\pi}\right) = -\frac{1}{2}$.

Si ricorda che

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \cos[f(x)] \cdot f'(x) \, dx = \sin[f(x)] + c$$

Si osserva che

$$\frac{1}{t} = t^{-1} \xrightarrow{\text{DERIVATA}} (-1) t^{-2} = -\frac{1}{t^2}$$

Dunque

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} dt &= \int \cos\left[\frac{1}{t}\right] \cdot \frac{1}{t^2} dt = - \int \cos\left[\frac{1}{t}\right] \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = \\ &= - \left[\sin\left[\frac{1}{t}\right] + c \right] = -\sin\left[\frac{1}{t}\right] - c \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} dt &= \left[-\sin\left(\frac{1}{t}\right) \right]_a^x = -\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \left[-\sin\left(\frac{1}{a}\right) \right] = \\ &= -\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{a}\right) = \\ &= \sin\left(\frac{1}{a}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

In definitiva

$$F(x) = \int_a^x \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2} dt = \sin\left(\frac{1}{a}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Imponiamo che $F\left(\frac{2}{\pi}\right) = -\frac{1}{2}$

$$F\left(\frac{2}{\pi}\right) = \sin\left(\frac{1}{a}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{1}{a}\right) - 1 = -\frac{1}{2} \rightarrow \sin\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{2} \quad ; \quad \text{con } a > 0$$

$$\text{e } \frac{2}{\pi} \geq a \rightarrow a \leq \frac{2}{\pi} \quad (a \leq 0,6366\dots)$$

$$\text{dunque } 0 < a \leq \frac{2}{\pi}$$



$$\frac{1}{a} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\frac{1}{a} = \frac{\pi + 12k\pi}{6}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{\pi(1+12k)}{6}$$

$$a = \frac{6}{\pi(1+12k)}$$

$$\text{con } 1+12k > 0 \quad (\text{perché } a > 0)$$

$$12k > -1$$

$$k > -\frac{1}{12}$$

$$\text{dunque } k \in \mathbb{N}$$

Allora

k	a
0	$6/\pi$ ($> 2/\pi$) non acc.
1	$6/13\pi$ ($< 2/\pi$)
2	$6/25\pi$ ($< 2/\pi$)
...	...

$$\frac{1}{a} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\frac{1}{a} = \frac{5\pi + 12k\pi}{6}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{\pi(5+12k)}{6}$$

$$a = \frac{6}{\pi(5+12k)}$$

$$\text{con } 5+12k > 0 \quad (\text{perché } a > 0)$$

$$12k > -5$$

$$k > -\frac{5}{12}$$

$$\text{dunque } k \in \mathbb{N}$$

Allora

k	a
0	$6/5\pi$ ($< 2/\pi$) accettabile
1	$6/17\pi$ ($< 2/\pi$)
2	$6/29\pi$ ($< 2/\pi$)
...	...

Il più grande valore di a accettabile è $a = \frac{6}{5\pi}$