SESSIONE ORDINARIA 2024

QUESITO 5 (STUDIO DI FUNZIONI)

Determinare la funzione polinomiale di quarto grado $y = p(x)$ sapendo che, in un sistema di riferimento cartesiano, il suo grafico verifica le seguenti condizioni:

- è tangente all'asse x nell'origine;
- passa per il punto $(1;0)$;
- ha un punto stazionario in $(2;-2)$

La funzione polinomiale cercata è del tipo:

$$y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

I 5 coefficienti $(a; b; c; d; e)$ si determinano imponendo le 5 condizioni espresse nella traccia:

- PASSAGGIO PER $O(0;0)$; $f(0) = 0$

  $e = 0$

  dunque la funzione cercata è del tipo

  $$y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$$

- TANGENTE ALL'ASSE X NELL'ORIGINE $O(0;0)$

  vuol dire che $f'(0) = 0$ cioè il coefficiente angolare della retta tangente al grafico in $O(0;0)$ è pari a 0 (retta orizzontale)

  $$y' = f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$

  $$f'(0) = 0$$

  $$d = 0$$

  dunque la funzione cercata è del tipo

  $$y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2$$

- PASSAGGIO PER IL PUNTO $(1;0)$

vuol dire $f(1) = 0$

cioè, sostituendo $\underline{a+b+c=0}$

- PASSAGGIO PER IL PUNTO $(2;-2)$

vuol dire $f(2) = -2$

cioè, sostituendo

$a(2)^4 + b(2)^3 + c(2)^2 = -2$

$\underline{16a + 8b + 4c = -2} \xrightarrow[\text{ovvero}]{} \underline{8a + 4b + 2c = -1}$

- IL PUNTO $(2;-2)$ SIA STAZIONARIO

vuol dire $f'(2) = 0$ cioè il coefficiente angolare della retta tangente al grafico in $(2;-2)$ è pari a 0 (retta tangente al grafico orizzontale)

$y' = f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx$

$f'(2) = 4a(2)^3 + 3b(2)^2 + 2c(2) = 0$

$32a + 12b + 4c = 0$

$\underline{8a + 3b + c = 0}$

Si tratta di risolvere il seguente sistema di 3 equazioni in 3 incognite

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 8a+4b+2c=-1 \\ 8a+3b+c=0 \end{cases}$$

con uno dei metodi noti.

$$\begin{cases} a = -b-c \\ 8(-b-c)+4b+2c=-1 \\ 8(-b-c)+3b+c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} // \\ -8b-8c+4b+2c=-1 \\ -8b-8c+3b+c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} // \\ -4b-6c=-1 \\ -5b-7c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} // \\ 4b+6c=1 \\ 5b+7c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} // \\ b=\frac{1-6c}{4} \\ 5\left(\frac{1-6c}{4}\right)+7c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} // \\ // \\ \frac{5-30c}{4}+7c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} // \\ // \\ 5-30c+28c=0 \end{cases}$$

$2c=5 \rightarrow c=\frac{5}{2}$ $\qquad b=\frac{1-6c}{4}$; $b=\frac{1-15}{4}$; $b=-\frac{14}{4}$; $b=-\frac{7}{2}$

$a=-b-c$; $a=\frac{7}{2}-\frac{5}{2}$; $a=1$

La funzione polinomiale cercata e'

$$y=f(x) = x^4-\frac{7}{2}x^3+\frac{5}{2}x^2$$

VERIFICA

$$y = f(x) = x^4 - \frac{7}{2}x^3 + \frac{5}{2}x^2$$

$$y' = f'(x) = 4x^3 - \frac{21}{2}x^2 + 5x$$

- PASSAGGIO PER $O(0;0)$

  $f(0) = 0$

- TANGENZA ALL' ASSE X NELL' ORIGINE

  $f'(0) = 0$

- PASSAGGIO PER $(1;0)$

  $f(1) = (1)^4 - \frac{7}{2}(1)^3 + \frac{5}{2}(1)^2 = 1 - \frac{7}{2} + \frac{5}{2} = 0$

- PASSAGGIO PER $(2;-2)$

  $f(2) = (2)^4 - \frac{7}{2}(2)^3 + \frac{5}{2}(2)^2 = 16 - 7(4) + 5(2) = 16 - 28 + 10 = -2$

- STAZIONARIETA' DEL PUNTO $(2;-2)$

  $f'(2) = 4(2)^3 - \frac{21}{2}(2)^2 + 5(2) = 32 - 21 \cdot 2 + 10 = 32 - 42 + 10 = 0$