

QUESITO 4 (RISOLUZIONE EQUAZIONI)

Dimostrare che l'equazione  $x^3 + x - \cos x = 0$

ammette un'unica soluzione positiva.

Si osserva che

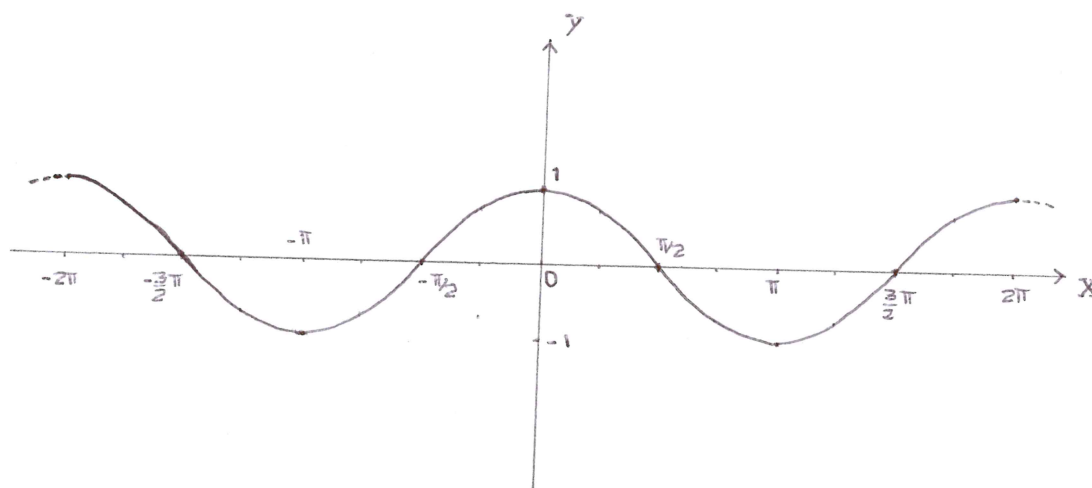
$$x^3 + x - \cos x = 0 \quad \xrightarrow{\text{EQ}} \quad x^3 + x = \cos x \quad \xrightarrow{\text{EQ}} \quad \begin{cases} y = \cos x \\ y = x^3 + x \end{cases}$$

SIGNIFICATO  
GEOMETRICO :  
DETERMINARE GLI  
EVENTUALI PUNTI DI  
INTERSEZIONE TRA  
LE DUE CURVE

La funzione

$$y = f(x) = \cos x$$

è una nota funzione elementare continua (e pari) (limitata in  $[-1; 1]$ )



Procediamo con un rapido studio della funzione  $y = f(x) = x^3 + x$

$$y = f(x) = x^3 + x$$

• DOMINIO

$$D = \mathbb{R}$$

• SIMMETRIE (PARI / DISPARI)

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$$

la funzione è dispari  $\rightarrow$  limitiamo indagine all'intervallo  $[0; +\infty[$

• INTERSEZIONE CON GLI ASSI

$$\begin{array}{l} \text{con } y \\ \text{asse } x \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = x^3 + x \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \quad (0; 0) \text{ è grafico della funzione}$$

$$\begin{array}{l} \text{con } y \\ \text{asse } x \end{array} \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ y = x^3 + x \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x(x^2 + 1) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x = 0 \rightarrow (0; 0) \\ x^2 + 1 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array}$$

• STUDIO DEL SEGNO

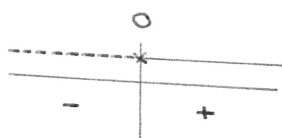
$$y = f(x) > 0$$

$$x^3 + x > 0$$

$$x(x^2 + 1) > 0$$

•  $x > 0$

•  $x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$



• CONTINUITÀ ED ASINTOTI

la funzione è continua in  $D \equiv \mathbb{R}$

non esistono asintoti verticali, orizzontali, obliqui (di immediata constatazione)

• CRESCENZA / DECRESCENZA, MASSIMI / MINIMI

$$y' = f'(x) = 3x^2 + 1$$

$$y' = f'(x) = 3x^2 + 1 = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{non esistono massimi / minimi}$$

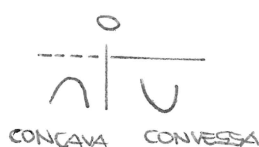
$$y' = f'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{funzione sempre crescente}$$

• CONVESSITÀ / CONCAVITÀ, FLESSI

$$y'' = f''(x) = 6x$$

$$y'' = f''(x) = 6x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{potenziale punto di flesso}$$

$$y'' = f''(x) = 6x > 0 \rightarrow x > 0$$



$x = 0$  è punto di flesso

$$y' = f'(x) = 3x^2 + 1$$

$$f'(0) = 1$$

nel punto di flesso  $(0; 0)$

la retta tangente è crescente

ed è inclinata di  $45^\circ$  rispetto all'asse orizzontale  $X$

A questo punto basta osservare (ricordando, in particolare, la stretta  
crescenza in tutto  $\mathbb{R}$  della funzione  
 $y = f(x) = x^3 + x$ )

| $x$       | $y = \cos x$  | $y = x^3 + x$                                 |
|-----------|---------------|-----------------------------------------------|
| 0         | 1             | 0                                             |
| $\pi/4$   | $\sqrt{2}/2$  | $(\pi/4)^3 + \pi/4 \approx 1,27 > \sqrt{2}/2$ |
| $\pi/2$   | 0             | $(\pi/2)^3 + \pi/2 \approx 5,45$              |
| $3\pi/4$  | $-\sqrt{2}/2$ | $(3\pi/4)^3 + 3\pi/4 \approx 15,44$           |
| $\pi$     | -1            | $(\pi)^3 + \pi \approx 34,15$                 |
| $-\pi/4$  | $\sqrt{2}/2$  | $\approx -1,27$                               |
| $-\pi/2$  | 0             | $\approx -5,45$                               |
| $-3\pi/4$ | $-\sqrt{2}/2$ | $\approx -15,44 < -\sqrt{2}/2$                |
| $-\pi$    | -1            | $\approx -34,15$                              |

STANTI LE  
SIMMETRIE

