

QUESITO 3 (GEOMETRIA NELLO SPAZIO)

Nello spazio con riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$,
 e' dato il piano $\pi: 3x - 2y + 5 = 0$.

- Determinare le coordinate del punto H , proiezione ortogonale di $P(4; 2; 1)$ sul piano π ;
- Determinare l'intersezione della retta $S: \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$ con il piano π .

$$\pi: 3x - 2y + 5 = 0 \quad (\alpha: ax + by + cz + d = 0 \quad \text{EQUAZIONE GENERALE CARTESIANA DI UN PIANO})$$

$$a = 3; b = -2; c = 0; d = 5$$

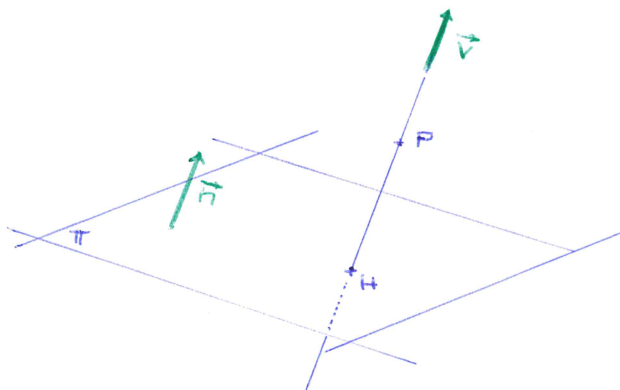
$$\vec{n}(3; -2; 0) \quad \text{COMPONENTI CARTESIANE DEL VETTORE NORMALE AL PIANO } \pi$$

$c = 0 \rightarrow$ il piano π e' // all'asse Z
 e $\perp$ al piano XY

Verifichiamo che il punto $P \notin \pi$ (altrimenti $H \equiv P$)

$$3x_P - 2y_P + 5 = 3(4) - 2(2) + 5 = 12 - 4 + 5 = 13 \neq 0$$

Determiniamo le equazioni parametriche della retta passante per il punto $P(4; 2; 1)$ e parallela al vettore direzione $\vec{v} \equiv \vec{n}(3; -2; 0)$
 cioè la retta per $P(4; 2; 1)$ e ortogonale al piano $\pi: 3x - 2y + 5 = 0$



(la retta ortogonale al piano π passante per il punto P ha per vettore direzione un vettore // al vettore normale al piano)

Ricorda.

Equazioni parametriche di una retta
passante per un punto $P_0(x_0; y_0; z_0)$
e // al vettore direzione $\vec{v}(l; m; n)$

$$P(x; y; z) \in r \rightarrow \begin{cases} x - x_0 = kl \\ y - y_0 = km \\ z - z_0 = kn \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = x_0 + kl \\ y = y_0 + km \\ z = z_0 + kn \end{cases}$$

Nel nostro caso

$$P_0(4; 2; 1)$$

$$\vec{v}(3; -2; 0)$$

dunque $\begin{cases} x = 4 + 3k \\ y = 2 - 2k \\ z = 1 \end{cases}$ (la retta e' // al piano π)

determiniamo la retta proiezione ortogonale come intersezione fra due piani
(uno dei quali e' $z=1$)

$$\begin{cases} x = 4 + 3k \\ y = 2 - 2k \end{cases} \begin{cases} k = \frac{x-4}{3} \\ y = 2 - 2 \cdot \frac{x-4}{3} \end{cases} \begin{cases} // \\ 3y = 6 - 2x + 8 \end{cases} \begin{cases} // \\ 2x + 3y - 14 = 0 \end{cases}$$

equazione della retta
proiezione ortogonale
come intersezione tra
due piani $\begin{cases} 2x + 3y - 14 = 0 \\ z = 1 \end{cases}$

Individuiamo il punto di intersezione tra la retta proiezione ortogonale
prima trovata ed il piano π

$$\begin{cases} 2x + 3y - 14 = 0 \\ z = 1 \\ 3x - 2y + 5 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = \frac{14 - 3y}{2} \\ // \\ 3 \left(\frac{14 - 3y}{2} \right) - 2y + 5 = 0 \end{cases} \begin{cases} // \\ // \\ 42 - 9y - 4y + 10 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} // \\ // \\ -13y = -52 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ z = 1 \\ y = 4 \end{cases} H(1; 4; 1)$$

VERIFICA $H(1; 4; 1)$ $\begin{cases} 2x + 3y - 14 = 0 \\ z = 1 \\ 3x - 2y + 5 = 0 \end{cases} \begin{cases} 0 = 0 \\ 1 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$

Determiniamo, in ultimo, l'intersezione della retta S con il piano Π

(3)

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \\ 3x - 2y + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 2 \\ x = y - 1 \\ 3(y - 1) - 2y + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} // \\ // \\ 3y - 3 - 2y + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} // \\ // \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 2 \\ x = -3 \\ y = -2 \end{cases} \quad I(-3; -2; 2)$$

VERIFICA

$I(-3; -2; 2)$

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \\ 3x - 2y + 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

OSSERVAZIONE

4

Verifichiamo che il vettore $\vec{HP}$ è parallelo al vettore $\vec{n}$

$$H(1; 4; 1)$$

$$P(4; 2; 1)$$

$$\vec{HP} (x_P - x_H; y_P - y_H; z_P - z_H)$$

$$\vec{HP} (3; -2; 0)$$

$$\vec{n} (3; -2; 0)$$

$$\frac{HP_x}{n_x} = 1; \quad \frac{HP_y}{n_y} = 1 \quad \text{dunque} \quad \vec{HP} \parallel \vec{n} \quad (\text{anzi, sono proprio identici})$$

(da qui si può comprendere come ho ragionato che ho sviluppato la traccia)

CURIOSITA'

Determiniamo il valore del parametro k che consente di individuare il punto $H(1; 4; 1)$ sulla retta proiezione ortogonale

$$\begin{cases} x = 4 + 3k \\ y = 2 - 2k \\ z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 3k + 4 = 1 \quad \rightarrow k = -1 \\ 2 - 2k = 4 \quad \rightarrow k = -1 \\ 1 = 1 \end{cases} \quad \text{dunque } k = -1$$