

QUESITO 2 (CALCOLO DELLE PROBABILITA')

Si lancia 5 volte una moneta truccata che dà testa con probabilità p .

- Qual è la probabilità di ottenere testa esattamente 2 volte?
- Per quale valore di p la probabilità di ottenere testa esattamente 2 volte è massima?

CONSIDERAZIONE FOCAL:

NECESSARIO RICORDARE LA DISTRIBUZIONE BINOMIALE (o DICOTOMICA) (discreta)

- Fissati :
un evento E (lancio della moneta che dà testa)
che ha una probabilità p di verificarsi ($1-p$ di non verificarsi),
ed un numero N (5) di "estrazioni" o "osservazioni" (lanci)
- si chiama
variabile casuale binomiale
- il numero x di volte (2) ($0 \leq x \leq N$)
che l'evento E (lancio della moneta che dà testa)
si presenta nelle N "estrazioni" (lanci) (5)

Si ha che
$$p_r(x) = \frac{N!}{x!(N-x)!} p^x (1-p)^{N-x}, \quad 0 \leq x \leq N, \quad x \in \mathbb{N}$$

probabilità che su N lanci

l'evento E (avente probabilità p) (lancio della moneta che dà testa)
si presenti x volte

Noti gli elementi riportati nella considerazione iniziale

il quesito si risolve abbastanza agevolmente

$$- \quad P_r(x) = \frac{N!}{x!(N-x)!} p^x (1-p)^{N-x}; \quad 0 \leq x \leq N, \quad x \in \mathbb{N}$$

la probabilità di ottenere testa 2 volte su 5 lanci sarà

$$P_r(2) = \frac{5!}{2!3!} p^2 (1-p)^3$$

$$P_r(2) = 10 p^2 (1-p)^3$$

- per determinare il valore di p per il quale risulta massima la probabilità di avere testa 2 volte, bisogna lavorare sulla derivata prima come nello studio di funzioni

$$f(p) = P_r(2) = 10 p^2 (1-p)^3$$

$$f'(p) = 20p(1-p)^3 + 10p^2 \cdot 3(1-p)^2(-1) =$$

$$= 20p(1-p)^3 - 30p^2(1-p)^2 =$$

$$= 10p(1-p)^2 [2(1-p) - 3p] =$$

$$= 10p(1-p)^2 (2-2p-3p) =$$

$$= 10p(1-p)^2 (2-5p) \quad \text{si ricorda che } 0 \leq p \leq 1$$

Poniamo $f'(p) = 0$

$$10p(1-p)^2(2-5p) = 0$$

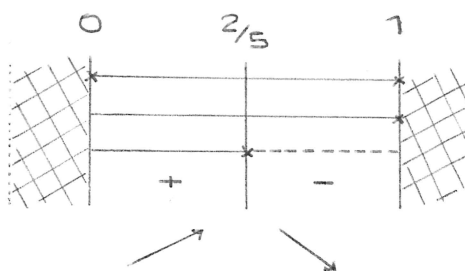
- $p=0$ (non significativo)
- $1-p=0 \rightarrow p=1$ (non significativo)
- $2-5p=0 \rightarrow p = \frac{2}{5} = 0,4 = 40\%$

potenziale punto di minimo/massimo

Studiamo $f'(p) > 0$

$$10p(1-p)^2(2-5p) > 0$$

- $p > 0$
- $(1-p)^2 > 0 \quad \forall p \neq 1$
- $2-5p > 0 \quad -5p > -2$
 $\quad \quad \quad \underline{p < \frac{2}{5}}$



$p = \frac{2}{5}$ e punto di massimo

In particolare $P_r(2) = 10 \cdot 0,4^2 (1-0,4)^3 = 0,3456 = 34,56\%$
max

OSSERVAZIONE.

Dunque se la moneta truccata dà testa con una probabilità del 40%

risulta massima la probabilità che su 5 lanci essa esca esattamente 2 volte

e tale probabilità è pari al 34,56%