SESSIONE ORDINARIA 2024

QUESITO 1 (GEOMETRIA) (ELEMENTARE)

È dato un triangolo $A\hat{B}C$, rettangolo in B.
Dimostrare che tale triangolo è isoscele se e solo se l'altezza BH relativa all'ipotenusa è congruente a metà ipotenusa.

OSSERVAZIONE CARDINE (RICORDA)

il «se e solo se»
si «traduce» nella
invertibilità della proprietà o teorema
(inversione ipotesi con tesi)

Dunque bisogna dimostrare quanto segue

1.

SE (IPOTESI)	ALLORA (TESI)
disponiamo di un triangolo rettangolo isoscele	l'altezza relativa all'ipotenusa è pari a mezza ipotenusa

2.

SE (IPOTESI)	ALLORA (TESI)
disponiamo di un triangolo rettangolo avente altezza relativa all'ipotenusa pari a mezza ipotenusa	il triangolo rettangolo è isoscele

Dimostriamo 1.

IPOTESI

$\overset{\triangle}{ABC}$ triangolo

$A\hat{B}C \cong 90^\circ$ (retto)

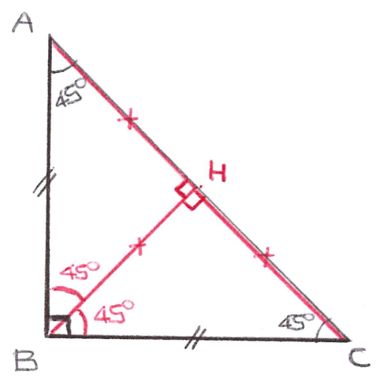
$AB \cong BC$ (isoscele) ; $B\hat{A}C \cong B\hat{C}A \cong 45^\circ$

$B\hat{H}A \cong B\hat{H}C \cong 90^\circ$ (altezza relativa all'ipotenusa)

TESI

$BH \cong \frac{AC}{2}$

(in alternativa, equivalentemente $AC \cong 2BH$)



Consideriamo il triangolo rettangolo $\overset{\triangle}{BHC}$, retto in H per ipotesi

$H\hat{C}B \cong 45^\circ$ (per ip) $\Longrightarrow$ $H\hat{B}C \cong 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ (nei triangoli rettangoli gli angoli acuti sono complementari) $\Longrightarrow$ (per def.) il triangolo rettangolo $\overset{\triangle}{BHC}$ e' isoscele con base BC

$\Downarrow$ propr. triangoli isosceli

$BH \cong HC$

Consideriamo il triangolo rettangolo $\overset{\triangle}{BHA}$, retto in H per ipotesi

$H\hat{A}B \cong 45^\circ$ (per ip) $\Longrightarrow$ $H\hat{B}A \cong 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ (nei triangoli rettangoli gli angoli acuti sono complementari) $\Longrightarrow$ (per def.) il triangolo rettangolo $\overset{\triangle}{HAB}$ e' isoscele su base AB

$\Downarrow$ propr. triangoli isosceli

$BH \cong AH$

Consideriamo l'ipotenusa AC

$$AC \underset{\text{costr.}}{\cong} AH + HC \underset{\text{dim. prec}}{\cong} BH + BH \underset{\text{alg.}}{\cong} 2BH$$ cvd

Dimostriamo 2.

IPOTESI

$A\hat{B}C$ triangolo

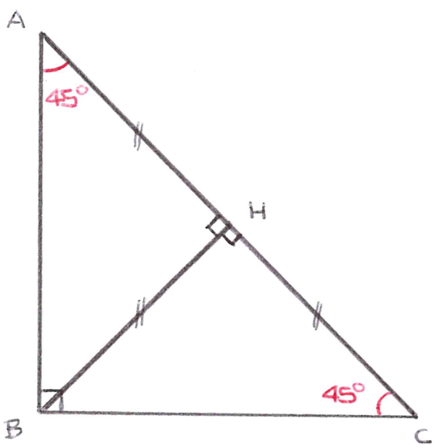
$A\hat{B}C \cong 90°$ (retto)

$BH \cong AH \cong HC$

$B\hat{H}A \cong B\hat{H}C \cong 90°$ (altezza relativa all'ipotenusa)

TESI

$AB \cong BC$ (isoscele)



Considieriamo il triangolo rettangolo $B\hat{H}C$ retto in H per ipotesi

$\underset{\text{per ip.}}{BH \cong HC} \underset{\text{def.}}{\Rightarrow} B\hat{H}C$ è isoscele $\underset{\text{prop. caat. triangoli isosceli}}{\Rightarrow} H\hat{B}C \cong H\hat{C}B \cong 45°$

gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sono complementari

Consideriamo il triangolo rettangolo $A\hat{B}C$ retto in B per ipotesi

$B\hat{A}C \cong 90° - B\hat{C}A \cong 90° - 45° \cong 45°$

gli angoli acuti in un triangolo rettangolo sono complementari

per dim. precedente

Dunque

$$\left.\begin{array}{ll} B\hat{A}C \cong 45° & \text{per dim. prec.} \\ B\hat{C}A \cong 45° & \text{per dim. prec.} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

il triangolo rettangolo $A\hat{B}C$ è isoscele e $AB \cong BC$ cvd

propr. caat. triangoli isosceli

Osservazione

Per la dimostrazione 2 si sarebbe potuto procedere come segue

Considerano i triangoli $B\overset{\triangle}{H}A$ e $B\overset{\triangle}{H}C$ essi hanno

$$\left.\begin{array}{ll} BH \cong BH & \text{(pr. riflessiva uguaglianza)} \\ HC \cong HA & \text{(per ip.)} \\ B\hat{H}A \cong B\hat{H}C \cong 90° & \text{(per p.)} \end{array}\right\} \xRightarrow[\substack{\text{triangoli} \\ \text{(rettangoli)}}]{\text{crit. congr.}} B\overset{\triangle}{H}A \cong B\overset{\triangle}{H}C$$

$$\Downarrow$$

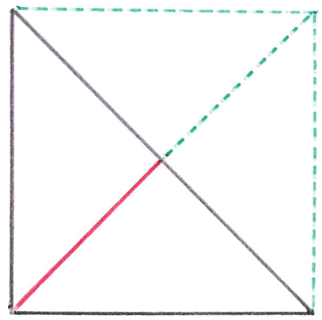
$$AB \cong BC \quad \text{cvd}$$

VERIFICA GRAFICA

1. Disegnare un triangolo rettangolo isoscele e constatare che l'altezza relativa all'ipotenusa e' pari a mezza ipotenusa.

Osservare che trattasi di mezzo quadrato e osservare il legame di coerenza con le proprieta' dei parallelogrammi (i quadrati in particolare)

(diagonali si dividono scambievolmente, sono congruenti e normali)



2. Disegnare un segmento (ipotenusa) (AC) condurre dal punto medio, ortogonalmente, un segmento congruente alla meta' del precedente (HB).
Unire A con B e condurre la normale in B al segmento AB; constatare il passaggio per C e che AB ≚ BC