

PROBLEMA 1

Si consideri $f_{a,b}(x) = \frac{ax^3 + b}{x^2}$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

- a) Determinare i valori dei parametri in modo che la retta t , di equazione $2x + y - 12 = 0$, sia tangente al grafico di $f_{a,b}(x)$ nel suo punto P di ascissa $x = 1$.

Si ponga, d'ora in avanti, $a = 1$ e $b = 4$.

- b) Studiare la funzione $y = f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}$ e tracciarne il grafico γ .

Scrivere l'equazione dell'ulteriore retta tangente alla curva γ passante per P .

- c) Al variare del parametro reale m , determinare il numero di intersezioni tra la retta di equazione $y - 5 = m(x - 1)$ e la curva γ .

- d) Sia $S(k)$, con $k > \frac{3}{2}$, l'area della regione finita di piano compresa tra la curva γ , il suo asintoto obliquo, la retta t e la retta di equazione $x = k$.

Calcolare il $\lim_{k \rightarrow +\infty} S(k)$, fornendo un'interpretazione geometrica del risultato ottenuto.

$$y = f_{a,b}(x) = \frac{ax^3 + b}{x^2}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

CONDIZIONE DI ESISTENZA (DOMINIO)

$$x^2 \neq 0 \rightarrow x \neq 0$$

$$D = \mathbb{R} - \{0\}$$

a) $L: 7x + y - 12 = 0$

EQUAZIONE DELLA RETTA L
IN FORMA IMPLICITA

$$L: y = -7x + 12$$

EQUAZIONE DELLA RETTA L
IN FORMA ESPlicita

$$m = -7$$

$$q = 12$$

$$x_P = 1 \rightarrow y_P = -7 + 12 = 5$$

$$P(1; 5)$$

Il punto $P \in \gamma$
(grafico di $f_{a,b}(x)$)

dunque $f_{a,b}(1) = 5$

$$\frac{a(1)^3 + b}{(1)^2} = 5 \rightarrow \underline{a + b = 5} \rightarrow \text{prima condizione al fine di determinare } a, b$$

Determiniamo la funzione derivata prima della funzione assegnata

$$\begin{aligned} y' = f'_{a,b}(x) &= \frac{(3ax^2)x^2 - (ax^3 + b)(2x)}{(x^2)^2} = \frac{3ax^4 - 2ax^4 - 2bx}{x^4} = \frac{ax^4 - 2bx}{x^4} = \\ &= \frac{x(ax^3 - 2b)}{x^4} = \frac{ax^3 - 2b}{x^3} \end{aligned}$$

$$y' = f'_{a,b}(x) = \frac{ax^3 - 2b}{x^3}$$

Si deve porre $f'_{a,b}(1) = m = -7$ stante il significato geometrico di derivata di una funzione in un punto

$$f'_{a,b}(1) = \frac{a(1)^3 - 2b}{(1)^3} = -7$$

$$\underline{a - 2b = -7} \rightarrow \text{seconda condizione al fine di determinare } a, b$$

$$\begin{cases} a+b=5 \\ a-2b=-7 \end{cases} \quad \begin{cases} \underline{a=5-b} \\ 5-b-2b=-7 \end{cases} \quad \begin{cases} // \\ -3b=-12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} // \\ b=4 \end{cases} \quad \begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases}$$

dunque

$$y = f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}$$

b) Studiamo la funzione $y = f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}$

• DOMINIO

$$x^2 \neq 0 \rightarrow x \neq 0$$

$$D = \mathbb{R} - \{0\}$$

• SIMMETRIE (PARI/DISPARI)

Il dominio è simmetrico rispetto all'origine $O(0;0)$

dunque ha senso indagare circa eventuali simmetrie

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + 4}{(-x)^2} = \frac{-x^3 + 4}{x^2} \rightarrow \begin{aligned} f(-x) &\neq f(x) \text{ la funzione non è pari} \\ f(-x) &\neq -f(x) \text{ la funzione non è dispari} \end{aligned}$$

• INTERSEZIONE CON GLI ASSI

Poiché $D = \mathbb{R} - \{0\}$ non è possibile intersezione con l'asse Y .

$$\begin{aligned} \text{Sull'asse } X \quad \begin{cases} y = \frac{x^3 + 4}{x^2} \\ y = 0 \end{cases} &\rightarrow \frac{x^3 + 4}{x^2} = 0 \quad ; \quad x^3 + 4 = 0 \quad x^3 = -4 \\ &x = \sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4} \quad (\approx -1,587) \end{aligned}$$

$A(-\sqrt[3]{4}; 0)$ è punto di intersezione con l'asse X

• STUDIO DEL SEGNO

$$y = f(x) > 0$$

$$\frac{x^3 + 4}{x^2} > 0$$

In trattasi di espressione frazionaria, si procede con lo studio del segno dei singoli fattori presenti

$$- \quad x^3 + 4 > 0$$

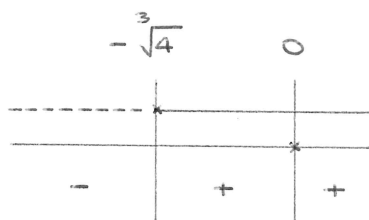
$$x^3 > -4$$

$$x > \sqrt[3]{-4}$$

$$x > -\sqrt[3]{4}$$

$$- \quad x^2 > 0$$

$$\underline{\forall x \neq 0}$$



$$f > 0 \text{ in }]-\sqrt[3]{4}; 0[\cup]0; +\infty[$$

$$f < 0 \text{ in }]-\infty; -\sqrt[3]{4}[$$

Indaghiamo in $x=0$ (punto escluso del dominio, ma di accumulazione per il dominio)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3+4}{x^2} = \frac{+4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3+4}{x^2} = \frac{+4}{0^+} = +\infty$$

In $x=0$ c'è una discontinuità di 2ª specie; $x=0$ è asintoto verticale
($+\infty$ sia a sinistra che a destra)

Il dominio è illimitato sia superiormente che inferiormente
dunque indaghiamo circa la presenza di asintoti orizzontali

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\cancel{3}} \left(1 + \frac{4}{x^3}\right)}{x^{\cancel{2}}} = +\infty \quad \text{non esiste asintoto orizzontale a destra}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3+4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{\cancel{3}} \left(1 + \frac{4}{x^3}\right)}{x^{\cancel{2}}} = -\infty \quad \text{non esiste asintoto orizzontale a sinistra}$$

Non esistendo asintoti orizzontali ha senso indagare circa l'esistenza di eventuali asintoti obliqui.

Si ricorda che

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad (\text{deve esistere, numero reale diverso da zero})$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) \quad (\text{deve esistere, numero reale})$$

Nel nostro caso

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^3+4}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3+4}{x^2} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3+4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^{\cancel{3}} \left(1 + \frac{4}{x^3}\right)}{x^{\cancel{3}}} = 1$$

$$m = 1$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3+4}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3+4-x^3}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x^2} = 0$$

$$q = 0$$

dunque la retta $y = x$ è asintoto obliquo a sinistra e a destra

● CRESCENZA, DECRESCENZA
MASSIMI, MINIMI

Determiniamo la derivata prima della funzione $y = f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}$

$$y' = f'(x) = \frac{(3x^2)x^2 - (x^3 + 4)(2x)}{(x^2)^2} = \frac{3x^4 - 2x^4 - 8x}{x^4} = \frac{x^4 - 8x}{x^4} =$$

$$= \frac{x(x^3 - 8)}{x^4} \underset{x \neq 0}{=} \frac{x^3 - 8}{x^3}$$

$$y' = f'(x) = \frac{x^3 - 8}{x^3} \quad D' = \mathbb{R} - \{0\} = D$$

Poniamo $y' = f'(x) = 0$ al fine di determinare i potenziali punti di minimo / massimo.

$$\frac{x^3 - 8}{x^3} = 0 \rightarrow x^3 - 8 = 0$$

$$x^3 = 8$$

$$x = \sqrt[3]{8} = 2$$

$x = 2$ (potenziale punto di minimo / massimo)

Studiamo $y' = f'(x) > 0$ al fine di determinare
crescenza / decrescenza

$$\frac{x^3 - 8}{x^3} > 0$$

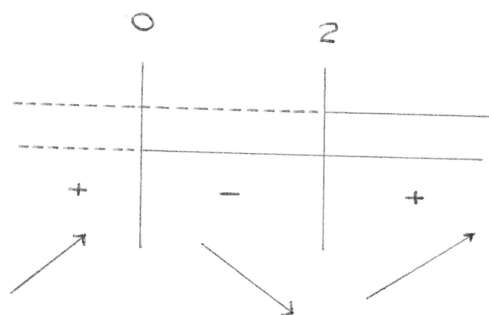
$$- \quad x^3 - 8 > 0$$

$$x^3 > 8$$

$$\underline{x > 2}$$

$$- \quad x^3 > 0$$

$$\underline{x > 0}$$



FUNZIONE CRESCENTE IN $]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$

FUNZIONE DECRESCENTE IN $]0; 2[$

$x = 2$ è un punto di minimo (relativo)

$$f(2) = \frac{(2)^3 + 4}{(2)^2} = \frac{8 + 4}{4} = 3 \quad (y = 3 \text{ è minimo relativo})$$

In $x = 2$ si ha un punto di minimo relativo pari a 3
 $B(2; 3)$

● CONVESSITA', CONCAVITA'

PUNTI DI FLESSO

Determiniamo la derivata seconda della funzione $y = f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}$

$$y' = f'(x) = \frac{x^3 - 8}{x^3}$$

dunque

$$y'' = f''(x) = \frac{(3x^2)(x^3) - (x^3 - 8)(3x^2)}{(x^3)^2} = \frac{3x^5 - 3x^5 + 24x^2}{x^6} = \frac{24x^2}{x^6} = \frac{24}{x^4}$$

$\downarrow$
 $x \neq 0$

$$y'' = f''(x) = \frac{24}{x^4} \quad D'' = \mathbb{R} - \{0\} = D' = D$$

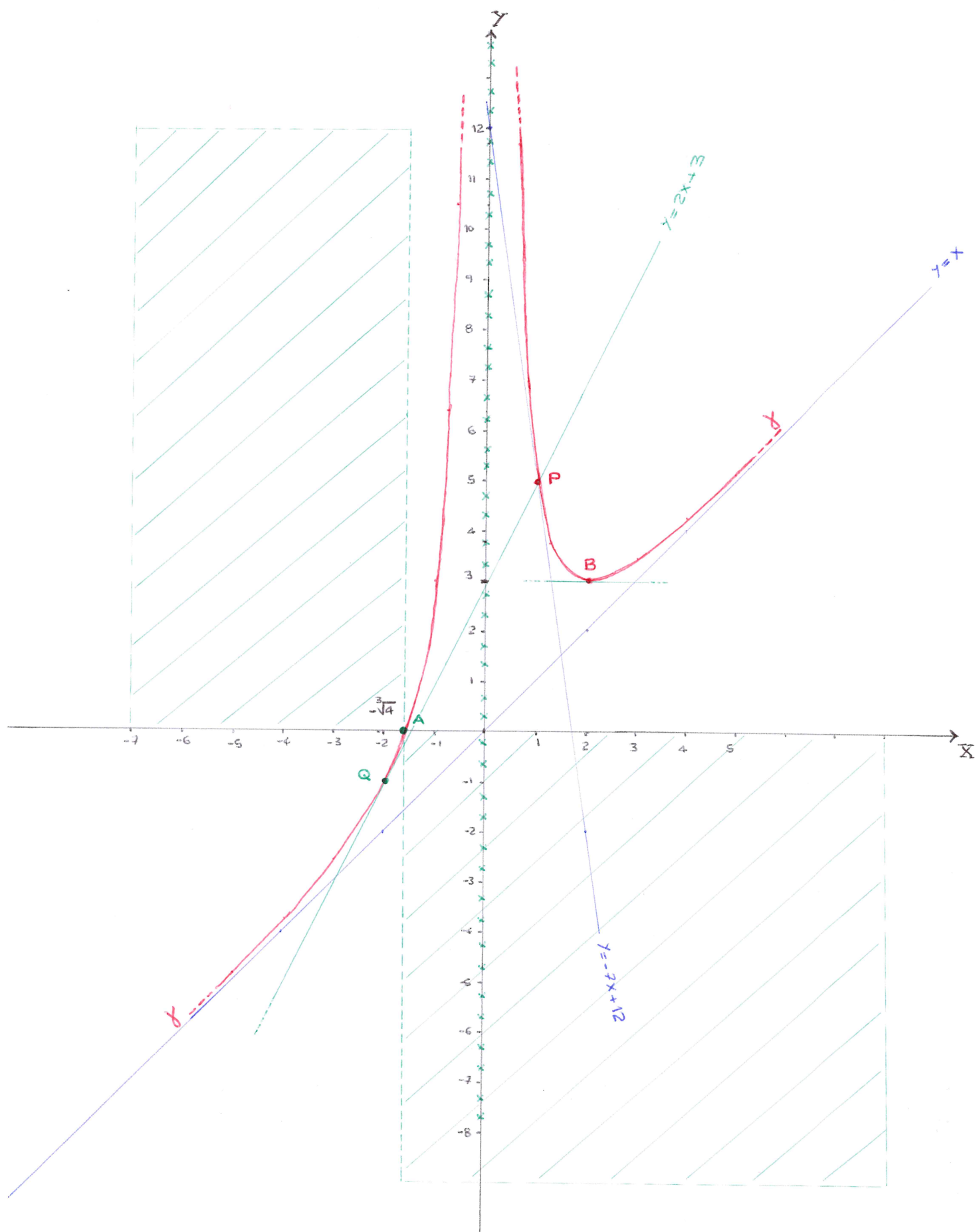
$$y'' = f''(x)$$

non è mai nulla

ed è sempre positiva

dunque non esistono punti di flesso

e la funzione è sempre convessa nel dominio



9

Determiniamo l'ulteriore retta tangente alla curva γ passante per $P(1;5)$

STRATEGIA : Scrivere l'equazione della generica retta tangente alla curva γ in un suo punto $Q(x_0; f(x_0))$ e determinare quelle passanti anche per il punto $P(1;5)$

$$\gamma = f(x) = \frac{x^3+4}{x^2}$$

$$\gamma' = f'(x) = \frac{x^3-8}{x^3}$$

$$y_0 = f(x_0) = \frac{x_0^3+4}{x_0^2}$$

$$m = f'(x_0) = \frac{x_0^3-8}{x_0^3}$$

Espressione della generica retta tangente alla curva γ in un suo punto $Q(x_0; f(x_0))$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

ovvero

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y - \frac{x_0^3+4}{x_0^2} = \frac{x_0^3-8}{x_0^3}(x - x_0)$$

imponiamo il passaggio (appartenenza) per il punto $P(1;5)$

$$5 - \frac{x_0^3+4}{x_0^2} = \frac{x_0^3-8}{x_0^3}(1 - x_0)$$

sviluppiamo ($x_0 \neq 0$)

$$5x_0^3 - (x_0^3+4)x_0 = (x_0^3-8)(1-x_0)$$

$$\begin{array}{ccccccc} 5x_0^3 & - & \cancel{x_0^4} & - & 4x_0 & = & x_0^3 - \cancel{x_0^4} - 8 + 8x_0 \\ \text{mm} & & \text{o} & & & \text{mm} & \sim \text{o} \end{array}$$

$$4x_0^3 - 12x_0 + 8 = 0$$

$$x_0^3 - 3x_0 + 2 = 0$$

equazione di 3° grado da risolvere in x_0 .

Scomponiamo (procedura di Ruffini)

10

per $x_Q = 1$ $(1)^3 - 3(1) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	//

$$x_Q^3 - 3x_Q + 2 = (x_Q - 1)(x_Q^2 + x_Q - 2)$$

dunque $x_Q^3 - 3x_Q + 2 = 0$

diviene $(x_Q - 1)(x_Q^2 + x_Q - 2) = 0$

• $x_Q - 1 = 0 \rightarrow x_Q = 1$ (cioè il punto P già noto)

• $x_Q^2 + x_Q - 2 = 0$

$\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$ SBD

$$x_{Q_{1/2}} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_Q = -2 \\ x_Q = 1 \end{cases} \text{ (cioè il punto P già noto)}$$

Allora

$$x_Q = -2 \rightarrow y_Q = \frac{(-2)^3 + 4}{(-2)^2} = \frac{-8 + 4}{4} = -1$$

$Q(-2; -1)$

$$m = f'_{(-2)} = \frac{(-2)^3 - 8}{(-2)^3} = \frac{-8 - 8}{-8} = 2$$

Riassumendo:

nel punto $Q \in \gamma$ con $Q(-2; -1)$

la retta tangente $y + 1 = 2(x + 2)$; $y + 1 = 2x + 4$; $y = 2x + 3$

e' anche passante per $P(1; 5)$

NOTA.

Al risultato poteva anche giungere procedendo per "tentativi" ragionevoli.

Guardando il grafico di γ si sarebbe potuta intuire la "bonta"

del punto $Q(-2; -1)$ onde poi verificare la correttezza della intuizione

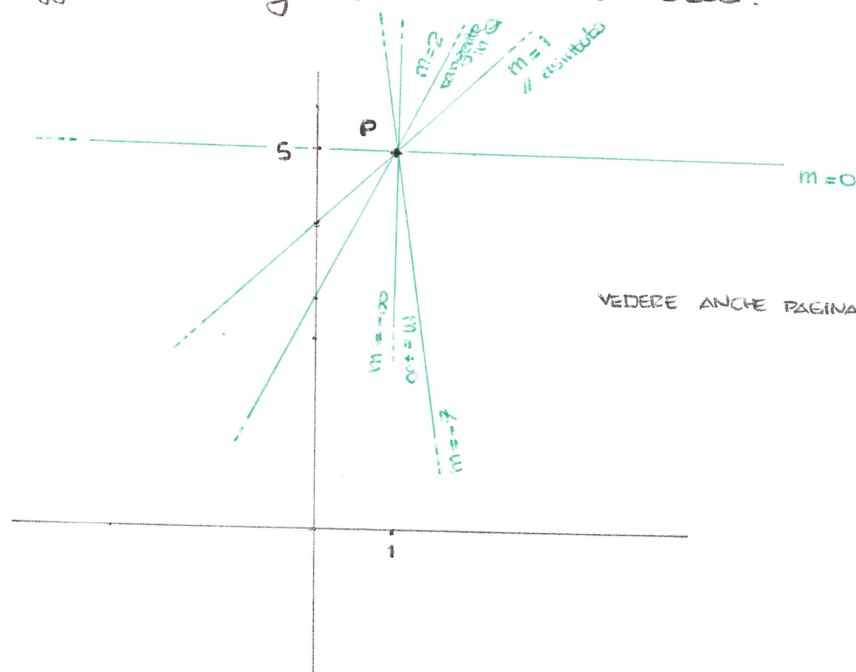
scrivendo direttamente l'equazione della retta tangente (unica come indicato dalla traccia) e verificandone il passaggio per $P(1; 5)$

c) Determiniamo, al variare di $m \in \mathbb{R}$, il numero di intersezioni tra la curva γ e la retta di equazione $y - 5 = m(x - 1)$

Si osserva che $y - 5 = m(x - 1)$ rappresenta il fascio proprio di rette passanti per $P(1; 5)$

(la retta $x = 1$ completa la rappresentazione del fascio $\mathcal{F}_P$)

Si può ragionare in termini grafici - si veda quanto riportato nella pagina successiva - essendo a conoscenza dell'andamento del grafico γ e conoscendo il significato fisico-geometrico del coefficiente angolare m di una retta.



PER $m = 0 \rightarrow 3$ INTERSEZIONI

PER $0 < m < 1 \rightarrow 3$ INTERSEZIONI

PER $m = 1 \rightarrow 2$ INTERSEZIONI (retta // all'asintoto)

PER $1 < m < 2 \rightarrow 3$ INTERSEZIONI

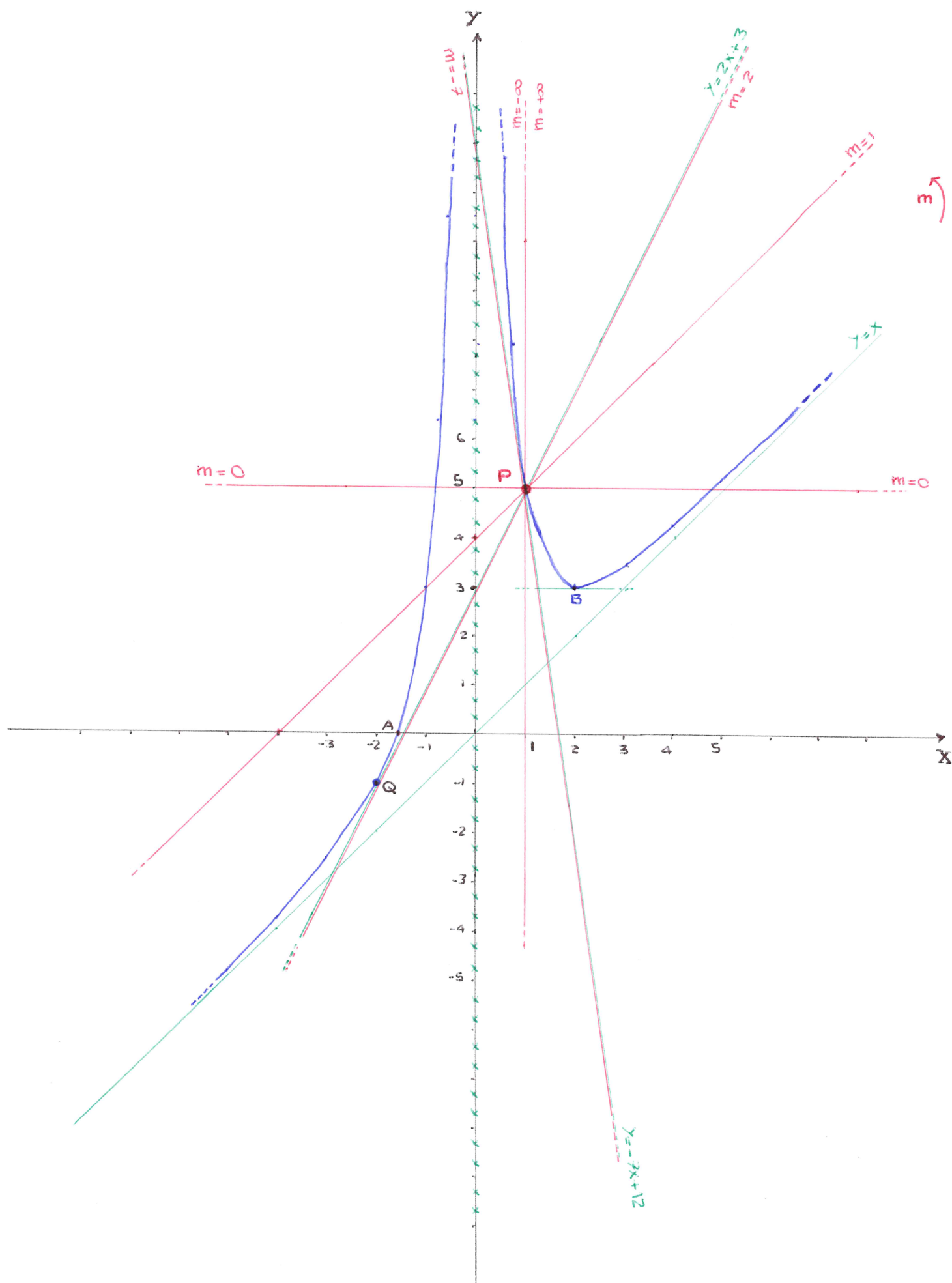
PER $m = 2 \rightarrow 3$ INTERSEZIONI (2 coincidenti in Q) (retta tangente a γ in Q)

PER $m > 2 \rightarrow 1$ INTERSEZIONE

PER $m < -7 \rightarrow 3$ INTERSEZIONI

PER $m = -7 \rightarrow 3$ INTERSEZIONI (2 coincidenti in P) (retta tangente a γ in P)

PER $-7 < m < 0 \rightarrow 3$ INTERSEZIONI



Si osserva che, in alternativa, in termini prettamente analitici, invece che grafici, si può ragionare come segue

$$\begin{cases} Y = \frac{X^3 + 4}{X^2} \\ Y - 5 = m(X - 1) \end{cases}$$

sostituendo

$$\frac{X^3 + 4}{X^2} - 5 = m(X - 1) \quad ; \quad \frac{X^3 + 4 - 5X^2}{X^2} = m(X - 1) \quad ; \quad m = \frac{X^3 - 5X^2 + 4}{X^2(X - 1)}$$

$$X - 1 \neq 0$$

$$X \neq 1$$

(per $x=1$ abbiamo una sola intersezione in P , $m = \infty$)

($x=1$ è sempre soluzione,

il punto $P(1;5)$ è sempre di intersezione $\forall m \in \mathbb{R}$)

Scomponiamo $X^3 - 5X^2 + 4$

$$P(1) = 1 - 5 + 4 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -5 & 0 & 4 \\ 1 & & 1 & -4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & -4 & // \end{array}$$

$$X^3 - 5X^2 + 4 = (X - 1)(X^2 - 4X - 4)$$

dunque $m = \frac{(X-1)(X^2-4X-4)}{X^2(X-1)} = \frac{X^2-4X-4}{X^2}$

Si può studiare

$$\begin{cases} Z = \frac{X^2 - 4X - 4}{X^2} \\ Z = m \quad (\text{retta orizzontale nel piano } XZ) \end{cases}$$

Studiamo, rapidamente, la funzione $Z = \frac{X^2 - 4X - 4}{X^2}$; $X \neq 0 \wedge X \neq 1$

• DOMINIO $X \neq 0$

• SIMMETRIE $Z(-X) = \frac{X^2 + 4X - 4}{X^2}$, funzione non simmetrica

• INTERSEZIONE ASSI

$$\begin{aligned} \text{dominio } X & \begin{cases} Z = 0 \\ Z = \frac{X^2 - 4X - 4}{X^2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X^2 - 4X - 4 = 0 \\ \Delta = 16 + 16 = 32 > 0 \end{cases} & X_{1/2} = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{2} = \frac{4(1 \pm \sqrt{2})}{2} = \begin{cases} 2(1 - \sqrt{2}) \quad (\approx -0.8) \\ 2(1 + \sqrt{2}) \quad (\approx 4.8) \end{cases} \end{aligned}$$

● STUDIO DEL SEGNO

$$\frac{x^2 - 4x - 4}{x^2} > 0$$

$$x^2 - 4x - 4 > 0$$

$$x < 2(1-\sqrt{2}) \quad \vee \quad x > 2(1+\sqrt{2})$$

$$\approx -0,8$$

$$\approx 4,8$$

● CONTINUITA' ED ASINTOTI

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 4x - 4}{x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 4x - 4}{x^2} = -\infty$$

$x=0$ e' asintoto verticale $(-\infty)$

dunque punto di discontinuita' di 2^a specie

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 4x - 4}{x^2} = 1$$

$z=1$ e' asintoto orizzontale

a sinistra e a destra

● CRESCENZA, DECRESCENZA
MASSIMI, MINIMI

$$z = \frac{x^2 - 4x - 4}{x^2}$$

$$z' = \frac{(2x-4)x^2 - (x^2-4x-4)2x}{x^4} ; \quad z' = \frac{\cancel{2x^3} - 4x^2 - \cancel{2x^3} + 8x^2 + 8x}{x^4} ; \quad z' = \frac{4x^2 + 8x}{x^4}$$

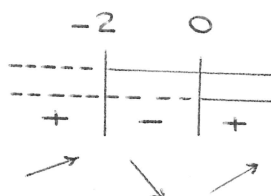
$$z' = \frac{4x(x+2)}{x^4} ; \quad z' = \frac{4(x+2)}{x^3} ; \quad x \neq 0$$

$$z' = 0 \rightarrow x = -2 \quad \text{potenziale punto stazionario}$$

$$z' > 0$$

$$x+2 > 0 \quad x > -2$$

$$x^3 > 0 \quad x > 0$$



$x = -2$ e' un massimo (assoluto)

$$z(-2) = \frac{4+8-4}{4} = 2$$

FLESSI

$$Z' = \frac{4x+8}{x^3}$$

$$Z'' = \frac{(4)(x^3) - (4x+8)3x^2}{x^6} ; \quad Z'' = \frac{4x^3 - 12x^3 - 24x^2}{x^6} ; \quad Z'' = \frac{-8x^3 - 24x^2}{x^6}$$

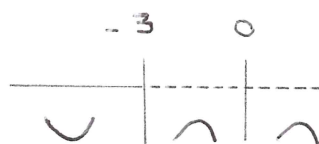
$$Z'' = \frac{-8x^2(x+3)}{x^6} ; \quad Z'' = \frac{-8(x+3)}{x^4} , \quad x \neq 0$$

$$Z'' = 0 \rightarrow x = -3 \quad \text{potenziale punto di flesso}$$

$$Z'' > 0 \rightarrow -8(x+3) > 0$$

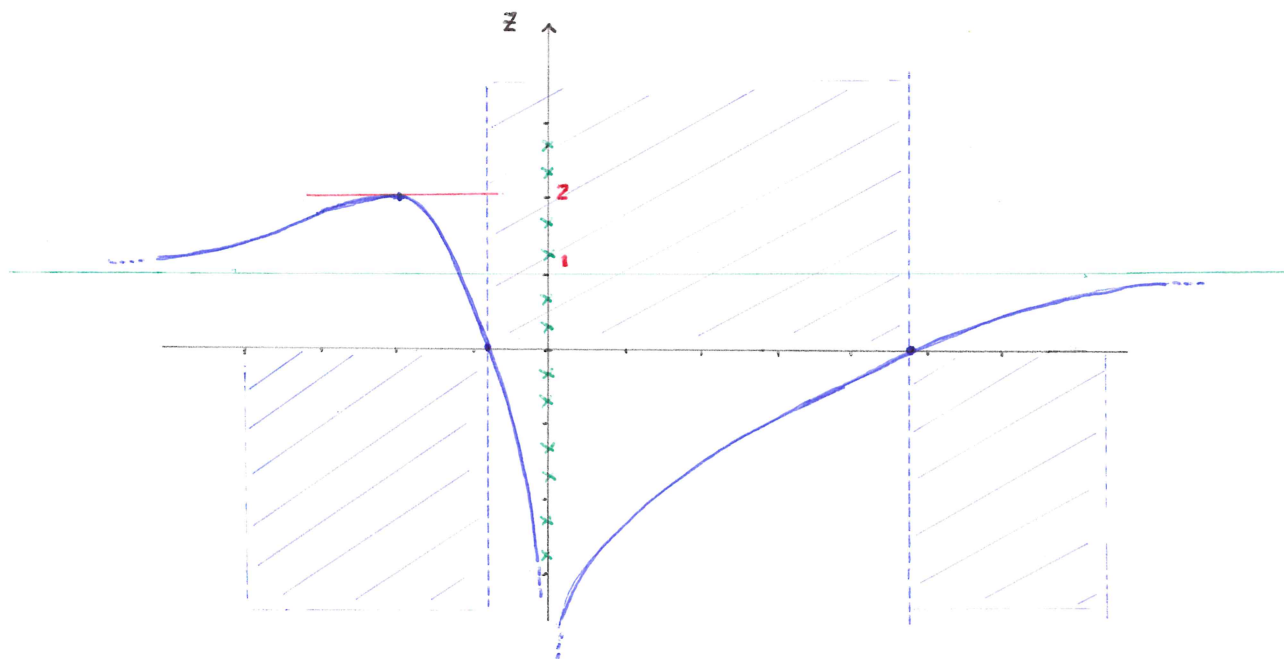
$$x+3 < 0$$

$$x < -3$$



$x = -3$ è punto di flesso

$$Z(-3) = \frac{9+12-4}{9} = \frac{17}{9}$$



Intersecando il grafico ottenuto con il fascio di rette orizzontali

$$Z = m$$

si ottengono risultati coerenti con quanto riportato schematicamente a pagina 11.

NOTA.

Il punto $P(1;5)$ è sempre punto di intersezione e non emerge dal grafico riportato in figura

d)

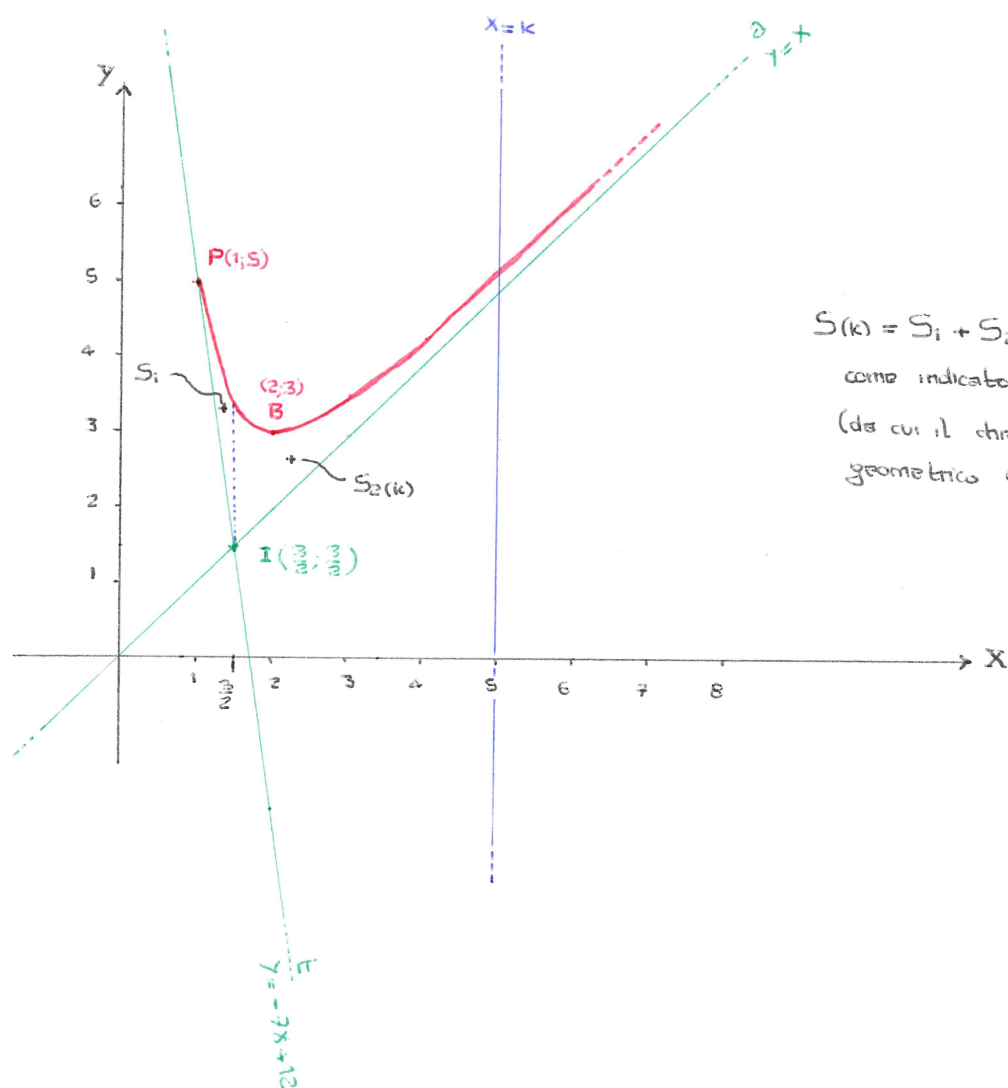
equazione della retta l : $y = -7x + 12$ equazione dell'asintoto obliquo a : $y = x$

Determiniamo il punto di intersezione fra le due rette

$$\begin{cases} y = -7x + 12 \\ y = x \end{cases} \quad \begin{cases} x = -7x + 12 \\ " \end{cases} \quad \begin{cases} 8x = 12 \\ " \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3/2 \\ y = 3/2 \end{cases}$$

$$I \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 4}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\frac{27}{8} + 4}{\frac{9}{4}} = \frac{\frac{27+32}{8}}{\frac{9}{4}} = \frac{59}{8} \cdot \frac{4}{9} = \frac{59}{18} \quad (\approx 3,28)$$



$$S(k) = S_1 + S_2(k)$$

come indicato in figura
(da cui il chiaro significato
geometrico in termini di area)

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \int_1^{3/2} \left(\frac{x^3+4}{x^2} - (-7x+12) \right) dx = \\
 &= \int_1^{3/2} \left(\frac{x^3+4}{x^2} + 7x - 12 \right) dx = \int_1^{3/2} \left(\frac{x^3+4+7x^3-12x^2}{x^2} \right) dx = \int_1^{3/2} \left(\frac{8x^3-12x^2+4}{x^2} \right) dx = \\
 &= \int_1^{3/2} \left(8x - 12 + \frac{4}{x^2} \right) dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int \left(8x - 12 + \frac{4}{x^2} \right) dx &= 8 \int x dx - 12 \int dx + 4 \int x^{-2} dx = 8 \frac{x^2}{2} - 12x + 4 \frac{x^{-1}}{-1} + C = \\
 &= 4x^2 - 12x - \frac{4}{x} + C
 \end{aligned}$$

allora

$$\begin{aligned}
 \int_1^{3/2} \left(8x - 12 + \frac{4}{x^2} \right) dx &= \left[4x^2 - 12x - \frac{4}{x} \right]_1^{3/2} = \left(4 \cdot \frac{9}{4} - 12 \cdot \frac{3}{2} - 4 \cdot \frac{2}{3} \right) - \left(4 - 12 - 4 \right) = \\
 &= \left(9 - 18 - \frac{8}{3} \right) - (-12) = \\
 &= -9 - \frac{8}{3} + 12 = 3 - \frac{8}{3} = \frac{9-8}{3} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

$$S_{2(k)} = \int_{3/2}^k \left(\frac{x^3+4}{x^2} - x \right) dx =$$

$$= \int_{3/2}^k \left(\frac{x^3+4-x^3}{x^2} \right) dx = \int_{3/2}^k \frac{4}{x^2} dx$$

$$\int \frac{4}{x^2} dx = 4 \int x^{-2} dx = 4 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{4}{x} + C$$

allora

$$\int_{3/2}^k \frac{4}{x^2} dx = \left[-\frac{4}{x} \right]_{3/2}^k = -\frac{4}{k} - \left(-4 \cdot \frac{2}{3} \right) = -\frac{4}{k} + \frac{8}{3} = \frac{8}{3} - \frac{4}{k}$$

$$S_{(k)} = S_1 + S_{2(k)} = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - \frac{4}{k} = 3 - \frac{4}{k}$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} S_{(k)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{4}{k} \right) = 3$$

Geometricamente vuol dire che l'area schematizzata a pag. 16, quando la retta verticale $x=k$ tende a destra in maniera illimitata, converge a 3 unit  grafiche al quadrato.